DM 8 : corrigé

Exercice 1 (ou Exercice 9 du TD 27–28)

1) Il est clair que $\mathcal{B}$ engendre F. Pour conclure, il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ est libre. Soit $(\lambda_i)_{1\leq i\leq 4}$ des réels. On suppose que

$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i f_i = 0$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda_1 \sin t + \lambda_2 \cos t + \lambda_3 t \sin t + \lambda_4 t \cos t = 0 \qquad (*)$$

En évaluant en $t = 0$, on trouve $\boxed{\lambda_2 = 0}$. En évaluant en $t = \frac{\pi}{2}$, on trouve que

$$\lambda_1 + \frac{\pi}{2}\lambda_3 = 0$$

En évaluant en $t = -\frac{\pi}{2}$, on obtient

$$-\lambda_1 + \frac{\pi}{2}\lambda_3 = 0$$

Or, $\begin{cases} \lambda_1 + \frac{\pi}{2}\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \frac{\pi}{2}\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\lambda_1 = 0 \\ \frac{\pi}{2}\lambda_3 = \lambda_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \boxed{\lambda_1 = 0} \\ \boxed{\lambda_3 = 0} \end{cases}$. Ainsi, la relation $(*)$ se réécrit

$$\lambda_4 t \cos t = 0$$

En évaluant en $t = \pi$, on en déduit que $-\lambda_4 \pi = 0$, donc $\boxed{\lambda_4 = 0}$. Finalement, la famille $\mathcal{B}$ est libre donc est une base de F.

2) Il est clair que D est linéaire : pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f, g \in F$, on a bien

$$D(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' = \alpha D(f) + \beta D(g)$$

Pour conclure, montrons que D définit bien une application de F dans F. On va dans un premier temps montrer que pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, on a $D(f_i) \in F$. En effet, comme F est un e.v. :

- $D(f_1) = f_2 \in F$
- $D(f_2) = -f_1 \in F$
- $D(f_3) = f_1 + f_4 \in F$
- $D(f_4) = f_2 - f_3 \in F$

Enfin, soit $g = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i f_i \in F$. Par linéarité de D :

$$D(g) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \underbrace{D(f_i)}_{\in F} \in F$$

car F est un e.v. Finalement, D est bien un endomorphisme.

3) Soit $g = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i f_i \in \operatorname{Ker} D$. On a

$$\begin{aligned} 0_{\mathcal{C}(\mathbb{R})} = D(g) &= \sum_{i=1}^{4} \lambda_i D(f_i) \\ &= \lambda_1 f_2 + \lambda_2(-f_1) + \lambda_3(f_1 + f_4) + \lambda_4(f_2 - f_3) \\ &= (\lambda_3 - \lambda_2)\, f_1 + (\lambda_1 + \lambda_4)\, f_2 + (-\lambda_4) f_3 + \lambda_3 f_4 \end{aligned}$$

Or, la famille $\mathcal{B}$ étant libre, on en déduit que

$$\begin{cases} \lambda_3 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Ainsi, $g = 0_{\mathcal{C}(\mathbb{R})}$ (ou encore 0_F). D'où $\operatorname{Ker} D = \{0_F\}$, l'inclusion réciproque étant évidente. On en déduit que D est injective.

De plus, comme $\mathcal{B}$ est une base de F, on en conclut que F est de dimension finie, avec $\dim F = \operatorname{card}(\mathcal{B}) = 4$. L'application D étant injective, elle est bijective et donc est en particulier surjective : on a donc $\operatorname{Im} D = F$.

Note : on peut donc remarquer que D est bijective, ce corrigé donne une façon d'arriver à la conclusion tout en répondant à la première partie de la question.

Exercice 2 : Espaces supplémentaires et polynômes

On considère les polynômes de $E = \mathbb{R}_5[X]$ suivants :

$$P_1 = X^5 + X^4, \quad P_2 = X^5 + X, \quad P_3 = -X^5 + 3X^4 + 2X.$$

1) Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\begin{aligned} & \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3 = 0 \\ \Longrightarrow\ & \alpha(X^5 + X^4) + \beta(X^5 + X) + \gamma\left(-X^5 + 3X^4 + 2X\right) = 0 \\ \Longrightarrow\ & (\alpha + \beta - \gamma)X^5 + (\alpha + 3\gamma)X^4 + (2\beta + \gamma)X = 0 \end{aligned}$$

donc par identification,

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 3\gamma = 0 \\ 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\beta + 2\gamma = 0 \quad L_2 - L_1 \\ 2\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ -\beta+2\gamma=0 \\ 5\gamma=0 \quad\quad\quad L_3+2L_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma=0 \\ \beta=0 \\ \alpha=0 \quad L_3+2L_2 \end{cases}$$

Finalement, la famille $\boxed{(P_1,P_2,P_3) \text{ est libre}}$.

2) $X \in F$ ssi il existe $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha P_1+\beta P_2+\gamma P_3 = X$, càd

$$(\alpha+\beta-\gamma)X^5+(\alpha+3\gamma)X^4+(2\beta+\gamma)X = X$$

donc ssi le système suivant admet une solution

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \; L_2-L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \end{array}\right) \; L_3+2L_2$$

On constate qu'il n'y a aucune équation de compatibilité à respecter : le système admet bien une solution. Donc $\boxed{X \in F}$.

3) On a clairement $G \subset \mathbb{R}_3[X]$.

- Le polynôme $P=0$ vérifie bien $P(0)=0=P(1)$, donc $0 \in G$.
- Soit $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ et $P,Q \in G$. Montrons que $R := \alpha P+\beta Q \in G$. On a

$$\begin{aligned} R(0) &= (\alpha P+\beta Q)(0) \\ &= \alpha P(0)+\beta Q(0) \\ &= \alpha P(1)+\beta Q(1) \qquad \text{car } P,Q \in G \\ &= R(1) \end{aligned}$$

  donc $R \in G$.

Ainsi, G est un s.e.v. de $\mathbb{R}_3[X]$. On montre de même que G est un s.e.v. de E.

4) Soit $P = aX^3+bX^2+cX+d \in \mathbb{R}_3[X]$. On a

$$\begin{aligned} P \in G &\iff P(0)=P(1) \\ &\iff d=a+b+c+d \\ &\iff a+b+c=0 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} G &= \left\{aX^3+bX^2+cX+d \mid c=-a-b,\ d \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{aX^3+bX^2+(-a-b)X+d \mid a,b,d \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{a(X^3-X)+b(X^2-X)+d \mid a,b,d \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left(1, X^2-X, X^3-X\right) \end{aligned}$$

Ainsi, la famille $\left(1, X^2-X, X^3-X\right)$ engendre G.

5) Montrons que $F \cap G = \{0\}$. Soit $P \in F \cap G$. Comme $P \in F$, il existe $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$P = \alpha P_1+\beta P_2+\gamma P_3$$

De plus, $P \in G$ donc :

- D'une part $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Ainsi, les coefficients de degré 4 ou 5 de P sont nuls. On en déduit que
$$\begin{cases} \alpha+\beta-\gamma=0 \\ \alpha+3\gamma=0 \end{cases}$$
- D'autre part $P(0)=P(1)$, donc $0 = 2\alpha+2\beta+4\gamma$.

La résolution de ces trois équations conduit (après calculs non détaillés ici) à $\alpha=\beta=\gamma=0$. Finalement, $F \cap G = \{0\}$, l'inclusion réciproque étant évidente.

Déterminons $F+G$. Comme F et G sont en somme directe, on a

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G$$

Or, par les questions 1 et 2, on a $\dim F = \operatorname{card}((P_1,P_2,P_3)) = 3$. De plus, par la question 4, la famille $\left(1, X^2-X, X^3-X\right)$ engendre G. Montrons que cette famille est libre. Soit $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\begin{aligned} &\alpha+\beta(X^2-X)+\gamma(X^3-X)=0 \\ \implies &\gamma X^3+\beta X^2+(-\beta-\gamma)X+\alpha = 0 \end{aligned}$$

Par identification, on trouve $\alpha=\beta=\gamma=0$. Donc la famille est libre : c'est une base de G. On en déduit que $\dim G = 3$. Ainsi,

$$\dim(F+G) = 6 = \dim \mathbb{R}_5[X]$$

On en déduit que $\boxed{F+G = \mathbb{R}_5[X]}$.